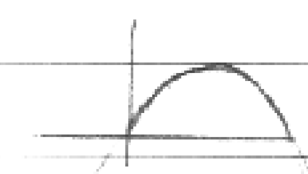
Naam:	Studentnummer:	Bladnr.: 1 / 6
Adres:	Studierichting: Wiskunde	Tentamen: Fouriertheorie
Postcode en		Datum: 29-11-2002
Woonplaats:	Jaar van eerste inschrijving: 2001	Naam docent: Prof. dr. M. v/d Put

1a
4

Als $x = 0$ dan $f_n(0) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
dus $F(0) = \lim_{n\to\infty} f_n(0) = \lim_{n\to\infty} = 0$

Als $x = 1$ dan $f_n(1) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
dus $F(1) = \lim_{n\to\infty} f_n(1) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$

het maximum van $4x(1-x) = 4x - 4x^2$
ligt bij $x = \frac{1}{2}$ deze functie is een
bergparabool dus



$\forall x \in (0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1)$ is $4x - 4x^2 < 1$
dus $0 < f_n(x) < 1 \quad \forall x \in (0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1)$
dus $F(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \quad \forall x \in (0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1)$

Voor $x = \frac{1}{2}$ is $f_n(x) = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
dus $F(\frac{1}{2}) = \lim_{n\to\infty} f_n(\frac{1}{2}) = 1$

dus als $F(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \quad x \in [0,1]$

dan $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{als } x \neq \frac{1}{2} \\ 1 & \text{als } x = \frac{1}{2} \end{cases}$ R

Merk op: $F(x) = 0$ b.a. $x \in [0,1]$

b
3

We hebben dat

waarom?

$\lim_{n\to\infty} \| f_n - F \|_\infty = \frac{1}{2} \neq 0$ dus f_n convergeert

niet uniform naar F. Dit kunnen we
ook anders inzien. Alle f_n zijn continu
(het zijn immers producten / samenstellingen
van continue functies) maar de limiet
F is discontinu in $x = \frac{1}{2}$. De convergentie
had dus nooit uniform kunnen zijn. R

c Komt na vraag 2 (sorry voor deze onlogische

2 $A \subset \mathbb{R}^m$ heeft m-dim. Lebesgue-maat 0 als:

7 $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists F, O \subset \mathbb{R}^m$ F gesloten, O open

$F \subset A \subset O$ en er bestaat een collectie (aftelbaar) blokken $\{I_n\}_{n \geq 1}$ $(I_n \subset \mathbb{R}^m)$ zodanig dat

$$A \subset \bigcup_{n \geq 1} I_n \quad \text{en} \quad \sum_{n \geq 1} |I_n|_m \leq \varepsilon$$

Voorbeelden van oneindige verzamelingen met maat 0:

- in $\mathbb{R}$ heeft $\mathbb{Q}$ maat nul daar $\mathbb{Q}$ aftelbaar is
- in $\mathbb{R}^m$ heeft iedere affiene deelverzameling m-dim. maat nul (bv. lijnen in $\mathbb{R}^2$, vlakken in $\mathbb{R}^3$)

VERVOLG

VRAAG 1: 1c

3

Dit is een gevolg van de gedomineerde convergentie stelling van Lebesgue:

Zij $f_n : X \to [0, +\infty]$ een rij ~~pos.~~ niet-negatieve functies en zij $F : X \to \mathbb{C}$ z.d.d.

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x) \quad \text{b.a. } x \in X$$

Als er een $g \in \mathcal{L}^1(X)$ bestaat met $g \geq 0$ en $|f_n(x)| \leq g(x)$, dan

$$\int_X F(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} \int_X f_n(x)\,dx$$

Hier is $X = [0,1)$ en we kunnen stellen $g(x) = 1$ dan $|f_n(x)| \leq g(x) \quad \forall n \in \mathbb{N}$ en dus volgt:

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 F(x)\,dx = 0$$

want $F(x) = 0$ b.a. $x \in [0,1)$

Naam:	Studentnummer:	Bladnr.: 2/6
Adres:	Studierichting:	Tentamen:
Postcode en		Datum:
Woonplaats:	Jaar van eerste inschrijving:	Naam docent:

3

10

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{als } x \notin \mathbb{Q} \\ 5 & \text{als } x \in \mathbb{Q} \end{cases} \quad \text{met } x \in [0,1]$$

$$\int_0^1 f(x)\, dx = \int_{x \notin [0,1] \cap \mathbb{Q}} x\, dx + \int_{x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}} 5\, dx$$

$$= \int_{x \notin [0,1] \cap \mathbb{Q}} x\, dx$$ (want $[0,1] \cap \mathbb{Q}$ heeft maat nul)

$$= \left[\tfrac{1}{2} x^2 \right]_0^1 = \tfrac{1}{2}$$

Naam: | Studentnummer: | Bladnr.: 3/6
Adres: | Studierichting: | Tentamen:
Postcode en | | Datum:
Woonplaats: | Jaar van eerste inschrijving: | Naam docent:

4 $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}) := \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \;\middle|\; \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\, dx < +\infty \right\}$

$\mathcal{L}^2(\mathbb{R}) := \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \;\middle|\; \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2\, dx < +\infty \right\}$

10

Neem $f = 1_{[0,1]}(x) \frac{1}{\sqrt{x}}$

dan $\int_{\mathbb{R}} \left| 1_{[0,1]}(x) \frac{1}{\sqrt{x}} \right|^2 dx = \int_0^1 \frac{dx}{x}$

$= \left[\log(x) \right]_0^1 = \log(1) - \lim_{R \to -\infty} \log(R) = +\infty$

$\int_{\mathbb{R}} \left| 1_{[0,1]}(x) \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \right| dx = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$

$= \left[2\sqrt{x} \right]_0^1 = 2 < +\infty$

Dus als $f = 1_{[0,1]}(x) \frac{1}{\sqrt{x}}$ dan $f \notin \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ wel $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$

5 Stelling van Dirichlet: zij $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ met het rechter lid de Fourierreeks van f. ~~Dan~~ en f is ~~mon~~ stuksgewijs monotoon en begrensd. Dan
10 convergeert de Fourierreeks van f puntsgewijs en de som is $f(x)$ als f continu in x en $\frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-))$ als f niet continu in x. Bovendien convergeert de Fourierreeks uniform op elke compacte verzameling $[a,b]$ bestaan de uit continuïteitspunten van f.

6 Beschouw $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \sin(nx)$. We gebruiken nu het criterium van Weierstrass:

zij $\sum u_n(x)$ een functiereeks. Als

i) er bestaan getallen M_n z.d.d. $|u_n(x)| \leq M_n \quad \forall x \in X$

ii) $\sum_{n=1}^{\infty} M_n < +\infty$

dan convergeert de reeks $\sum u_n(x)$ uniform op X

$\left| \sin(nx) \frac{1}{n^3} \right| \leq \frac{1}{n^3}$ (daar $-1 \leq \sin(nx) \leq 1$)

We weten ook dat $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} < +\infty$

dit kunnen we zien met het integraal kenmerk

9 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3} = \left[-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2} \right]_1^{+\infty} = \frac{1}{2}$

of met het majoranten kenmerk:

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} < +\infty$ en $\frac{1}{n^3} < \frac{1}{n^2}$ dus ook

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} < +\infty$

Hieruit volgt dat $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \sin(nx)$ uniform convergeert

De reeks convergeert naar een continue functie daar $\frac{1}{n^3} \sin(n \cdot x)$ een continue functie is en de reeks uniform convergent is.

10 7 $f(x) = \sin(\frac{1}{2}x)$ is een oneven functie:

$f(-x) = \sin(-\frac{1}{2}x) = -\sin(\frac{1}{2}x) = -f(x)$

dus we kunnen concluderen dat:

$a_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(\tfrac{1}{2}x) \sin(nx)\, dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{e^{i\frac{1}{2}x} - e^{-i\frac{1}{2}x}}{2i} \cdot \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}\, dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{e^{i(\frac{1}{2}x + nx)} - e^{i(\frac{1}{2}x - nx)} - e^{-i(\frac{1}{2}x - nx)} + e^{-i(\frac{1}{2}x + nx)}}{-4}\, dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \tfrac{1}{2}\cos(\tfrac{1}{2}x - nx) - \tfrac{1}{2}\cos(\tfrac{1}{2}x + nx)\, dx$$

Naam:	Studentnummer:	Bladnr.: 4/6
Adres:	Studierichting:	Tentamen:
Postcode en		Datum:
Woonplaats:	Jaar van eerste inschrijving:	Naam docent:

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \tfrac{1}{2}\cos\left(\left(\tfrac{1}{2}-n\right)x\right) - \tfrac{1}{2}\cos\left(\left(\tfrac{1}{2}+n\right)x\right)\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos\left(\left(\tfrac{1}{2}-n\right)x\right) - \cos\left(\left(\tfrac{1}{2}+n\right)x\right)\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{\left(\frac{1}{2}-n\right)}\sin\left(\left(\tfrac{1}{2}-n\right)x\right) - \frac{1}{\left(\frac{1}{2}+n\right)}\sin\left(\left(\tfrac{1}{2}+n\right)x\right)\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{\frac{1}{\left(\frac{1}{2}-n\right)}\sin\left(\left(\tfrac{1}{2}-n\right)\pi\right) - \frac{1}{\left(\frac{1}{2}+n\right)}\sin\left(\left(\tfrac{1}{2}+n\right)\pi\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{\frac{1}{\left(\frac{1}{2}-n\right)}(-1)^n - \frac{1}{\left(\frac{1}{2}+n\right)}(-1)^{n+1}\right\}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{\frac{(-1)^n}{\left(\frac{1}{2}-n\right)} + \frac{(-1)^n}{\left(\frac{1}{2}+n\right)}\right\}$$

Dus $\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi}\left\{\frac{(-1)^n}{\left(\frac{1}{2}-n\right)} + \frac{(-1)^n}{\left(\frac{1}{2}+n\right)}\right\}\sin(nx)$ ✓

Er geldt dat $\forall x \in (-\pi, \pi]$ x is een continuiteitspunt van $\sin\left(\frac{x}{2}\right)$ dus volgens de stelling van Dirichlet (zie vraag 5) is $R(x) = f(x)$ $\forall x \in (-\pi, \pi]$

10 8 $\mathcal{F}(f) := \int_{\mathbb{R}^m} e^{-2\pi i xy} f(x)\, dx$

met $xy = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_m y_m$

$$f(x_1, \dots, x_m) = \begin{cases} 1 & \text{als } |x_i| \leq a \ \forall i \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$$

dan krijgen we

$$\mathcal{F}(f) = \int_{-a}^{a} \cdots \int_{-a}^{a} e^{-2\pi i x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_m y_m} \, dx_1 \cdots dx_m$$

$$= \int_{-a}^{a} \cdots \int_{-a}^{a} e^{-2\pi i x_1 y_1} \cdot e^{-2\pi i x_2 y_2} \cdot \dots \cdot e^{-2\pi i x_m y_m} \, dx_1 \cdots dx_m$$

$$(\text{Fubini!}) = \left(\int_{-a}^{a} e^{-2\pi i x_1 y_1} dx_1 \right) \cdot \dots \left(\int_{-a}^{a} e^{-2\pi i x_m y_m} dx_m \right)$$

$$= \left(\left[\frac{-1}{2\pi i y_1} e^{-2\pi i x_1 y_1} \right]_{-a}^{a} \right) \cdot \dots \left(\left[\frac{-1}{2\pi i y_m} e^{-2\pi i x_m y_m} \right]_{-a}^{a} \right)$$

$$= \cancel{\frac{\sin(2\pi y_1)}{2\pi y_1}} \cdot \dots \cdot \cancel{\sin(2\pi y_m)}$$

$$= \frac{\sin(2\pi a y_1)}{2\pi a y_1} \cdot \dots \cdot \frac{\sin(2\pi a y_m)}{2\pi a y_m}$$

$$= \frac{1}{(2\pi a)^m} \cdot \prod_{i=1}^{m} \frac{\sin(2\pi a y_i)}{y_i}$$

Naam:	Studentnummer:	Bladnr.: 5/6
Adres:	Studierichting:	Tentamen:
Postcode en		Datum:
Woonplaats:	Jaar van eerste inschrijving:	Naam docent:

9 $$\left(\|f\|_2\right)^2 := \int_{\mathbb{R}} \left|x e^{-\pi x^2}\right|^2 dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} x^2 e^{-2\pi x^2} dx$$ (integrand is een even functie!)

$$= 2\int_0^{+\infty} x^2 e^{-2\pi x^2} dx$$

$$= \int_0^{+\infty} x \cdot 2x e^{-2\pi x^2} dx$$

$$= \left[\frac{-x e^{-2\pi x^2}}{2\pi}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-2\pi x^2}}{-2\pi} dx$$ (partiële integratie)

Nu is $\left[\frac{-x e^{-2\pi x^2}}{2\pi}\right]_0^{+\infty} = 0$ dus nu nog uit te rekenen:

$$I := \frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty} e^{-2\pi x^2} dx$$

$$I^2 = \left(\int_0^{+\infty} e^{-2\pi x^2} dx\right)\left(\int_0^{+\infty} e^{-2\pi y^2} dy\right) \cdot \frac{1}{4\pi^2}$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-2\pi(x^2+y^2)} dx\, dy$$ (Fubini)

$$= \frac{1}{4\pi}\int_{\theta=0}^{\frac{1}{2}\pi}\int_{r=0}^{+\infty} r e^{-2\pi r^2} dr\, d\theta$$ (Cartesisch $\rightarrow$ polair)

$$= \frac{1}{8}\left[\frac{e^{-2\pi r^2}}{-2\pi}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{16\pi}$$

dus $\|f\|_2^2 = \frac{1}{16\pi} \Longrightarrow \|f\|_2 = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{\pi}}$

ongeveer correct.

$$f(x) = x e^{-\pi x^2}$$

$$\hat{f}(y) = \mathcal{F}(f) = \int_{\mathbb{R}} x e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i x y} \, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i x y} \qquad \text{(partieel integreren)}$$

$$= \left[\frac{e^{-\pi x^2}}{-2\pi} \cdot e^{-2\pi i x y} \right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\pi x^2}}{-2\pi} \cdot \left(\frac{e^{-2\pi i x y}}{-2\pi i y} \right) dx$$

moet gedifferentieerd worden!

Nu is $\left[\frac{e^{-\pi x^2}}{-2\pi} e^{-2\pi i x y} \right]_{-\infty}^{+\infty} = 0$

(x^2 in de eerste e-macht jaagt de zaak sneller naar nul dan dat x de boel kan opblazen)

dus $\hat{f}(y) = -\frac{1}{4\pi^2 i y} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i x y} \, dx$

$$= \cancel{-\frac{1}{4\pi^2 i y} \cdot e^{-\pi y^2}} \qquad -iy e^{-\pi y^2}$$

Want $e^{-\pi x^2}$ is invariant onder de Fourier transformatie.

Naam:	Studentnummer:	Bladnr.: 6/6
Adres:	Studierichting:	Tentamen:
Postcode en		Datum:
Woonplaats:	Jaar van eerste inschrijving:	Naam docent:

10 $\dfrac{\partial u}{\partial t} = a \dfrac{\partial u}{\partial x}$ met $u(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} e^{inx}$

Stel $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)\cos(nx) + b_n(t)\sin(nx)$

Invullen in de partiële dv geeft:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n'(t)\cos(nx) + b_n'(t)\sin(nx) = a \sum_{n=1}^{\infty} -a_n(t)\,n\sin(nx) + b_n(t)\,n\cos(nx)$$

Dit geeft twee gewone differentiaal vergelijkingen voor de coëfficienten:

$$\frac{d}{dt} a_n(t) = an \cdot b_n(t)$$

$$\frac{d}{dt} b_n(t) = -an \cdot a_n(t)$$

Een oplossing is $a_n(t) = C_1 \sin(nat)$
$b_n(t) = C_2 \cos(nat)$

Met C_1 en C_2 constanten (mogelijk afh. van n)

$$W(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_1(n)\sin(nat)\cos(nx) + C_2(n)\cos(nat)\sin(nx)$$

$W(x,0) = f(x) \Longrightarrow$

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_2(n)\sin(nx) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} e^{inx}$$

klopt wel ongeveer, maar $C_1(n)$, $C_2(n)$ moeten nog berekend worden.